MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

4. Derivadas

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando, podemos destacar dos problemas principales:

- Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).
- Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo, la derivada, no se formuló hasta el siglo XVII. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642 - 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) de la relación entre estas dos ideas, tan dispares en apariencia, lo que inició el magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibniz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571 - 1630), René Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), John Wallis (1616 -1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) entre otros.

4.1 Limites

Sean I un intervalo, a un punto de I, y f una función definida en I-{a}. Naturalmente, como f no está definida en a no tiene sentido hablar de la continuidad de f en a. Sin embargo, podemos preguntarnos ¿es posible encontrar un número L ∈ R tal que definiendo f (a)=L, la nueva función así obtenida sea continua en a? Para ello el número L tendría que cumplir la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

La condición "0 < |x – a |" se pone para excluir la posibilidad de hacer x =a en la desigualdad |x – a|< δ, lo cual es obligado porque la función f no está definida en a.

Definición. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número L ∈ R tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Proposición: Sea f: I→R una función definida en un intervalo y sea a∈I.Equivalen las afirmaciones siguientes:

i) f es continua en a.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a).$

4.1.1 Algebra de limites

Es evidente que la existencia del límite de una función en un punto a depende solamente del comportamiento de la función en los puntos próximos al punto a, es decir, el concepto de límite, al igual que el de continuidad en un punto, es un concepto local. Para calcular un límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, podemos restringir la función f a un intervalo abierto que contenga al punto a. Eso es lo que se afirma en el siguiente resultado que es de comprobación inmediata.

Proposición. Sea J un intervalo abierto que contiene al punto a. Entonces se verifica que

$$\lim_{x \to a} \hat{f}(x) = L \textit{ si, y sólo si, } \lim_{x \to a} f_{|J}(x) = \hat{L}.$$

El siguiente resultado pone de manifiesto la compatibilidad de la "operación de paso al límite" con la estructura algebraica y de orden de R.

Teorema. Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o +∞, o -∞. Se verifica entonces que:

i) *Las funciones* $f+g$ *y* fg *tienen límite en* a *y*
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x), \qquad \lim_{x\to a}(fg)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\,\lim_{x\to a}g(x)$$

ii) *Si* $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$, *entonces* $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim_{x\to a}f(x)}$.

iii) *Si* $f(x)\leqslant g(x)$ *para todo* $x\in I$, $x\neq a$, *entonces* $\lim_{x\to a}f(x)\leqslant\lim_{x\to a}g(x)$.

iv) *Supongamos que* $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ *para todo* $x\in I$, $x\neq a$ *y* $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$. *Entonces se verifica que* h *tiene límite en* a *y* $\lim_{x\to a}h(x)=L$.

En el siguiente resultado se establecen condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto.

Teorema. Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o +∞, o -∞.

i) *Supongamos que hay un número* $M\in\mathbb{R}$ *tal que* $g(x)\geqslant M$ *para todo* $x\in I$, $x\neq a$. *Entonces* $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=+\infty$.

ii) *Supongamos que hay un número* $M>0$ *tal que* $g(x)\geqslant M$ *para todo* $x\in I$, $x\neq a$. *Entonces* $\lim_{x\to a}(fg)(x)=+\infty$.

En el siguiente resultado se establece que el producto de una función con límite 0 por una función acotada tiene límite cero.

Teorema. *Supongamos que* $\lim_{x\to a}f(x)=0$, *y que hay un número* $M>0$ *tal que* $|g(x)|\leqslant M$ *para todo* $x\in I$, $x\neq a$. *Entonces* $\lim_{x\to a}(fg)(x)=0$.

Con frecuencia este resultado se aplica cuando la función g es alguna de las funciones seno, coseno, arcoseno, arcocoseno o arcotangente. Todas ellas son, como ya sabes, funciones acotadas.

El siguiente resultado establece que la continuidad permuta con el paso al límite. Es un resultado que se usará bastante cuando estudiemos técnicas de cálculo de límites.

Teorema. *Supongamos que* f *tiene límite en el punto* a *y sea* $L = \lim_{x \to a} f(x)$*. Sea* g *una función continua en* L*. Entonces se verifica que la función compuesta* $g \circ f$ *tiene límite en* a *igual a* $g(L)$*, esto es,* $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(L)$*. Simbólicamente:*

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to a} f(x))$$

4.2 Definición de las derivadas

Para entender los resultados del Cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada. La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón "instantánea" de cambio.

4.2.1 Tangente a una curva

Supongamos que queremos hallar la tangente a una curva de ecuación cartesiana $y=f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente. En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$, con un punto cercano $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

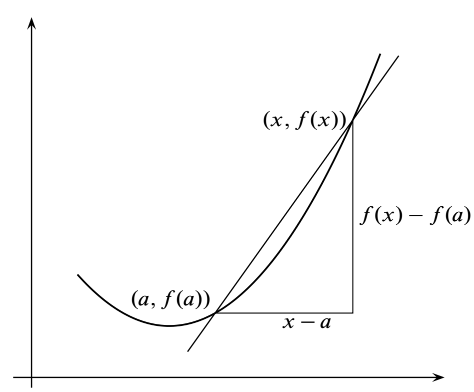
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dicho número suele llamarse cociente incremental de f en a.

Observa que una secante es una buena aproximación de la tangente, siempre que el punto $(x, f(x))$ esté próximo a $(a, f(a))$. Estas consideraciones llevan a definir la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

supuesto, claro está, que dicho límite exista.



4.2.2 Razón de cambio puntual y velocidad instantánea

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar “razón de cambio puntual de $y=f(x)$ con respecto a x en el punto a” como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El ejemplo más conocido de esto que decimos es el de un móvil que se mueve a lo largo de una recta sobre la cual hemos elegido un origen. Sea $s(t)$ la posición del móvil en el tiempo t, es decir, la distancia con signo del móvil al origen en el tiempo t. La razón de cambio promedio tiene en este caso una interpretación física natural:

$$\frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

Es la **velocidad media del móvil** en el intervalo de tiempo comprendido entre a y $a+h$. Parece intuitivo que, en cada instante, el móvil se mueve con una determinada velocidad instantánea. Pero no hay manera de medir directamente una velocidad instantánea; un instante quiere decir una posición en la recta: la velocidad instantánea del móvil para $t=a$ es la velocidad que tiene cuando está en la posición $s(a)$. La velocidad instantánea es una abstracción de un característica física del movimiento, pero no es una magnitud que podamos observar directamente. La única definición razonable de velocidad instantánea es como la razón de cambio puntual:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

Definición. Se dice que una función $f \to R$ es derivable en un punto a∈I , si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número $L \in \mathbb{R}$ verificando que para cada número $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leqslant \varepsilon.$$

Dicho número L se llama **derivada de f en a** y lo representaremos por f´(a) (notación debida a Lagrange).

La notación de Lagrange tiene la gran ventaja de poner de manifiesto que al aplicar la operación de derivación a una función obtenemos una nueva función, que está definida en todos los puntos donde la función dada sea derivable. Es usual considerar funciones derivadas definidas en intervalos.

Definición. Dada una función $f \to R$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f':I \to R$ que a cada punto x∈I hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Observaciones. i) El límite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se puede escribir también de la forma $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La notación **diferencial de Leibniz**. La notación $df(x)/dx$ para representar la derivada de f en x es debida a Leibniz.

Leibniz interpretaba ese símbolo como un "cociente diferencial" pues él lo entendía así: como un cociente de cantidades infinitesimales, y lo manejaba como un cociente; por ejemplo, se puede multiplicar o dividir, según convenga, por dx o $df(x)$. Por eso, la interpretación de Leibniz de la derivada, aunque intuitiva, no es la que se sigue en la gran mayoría de los cursos de cálculo.

A pesar de lo dicho, es frecuente, sobre todo en libros de ingeniería, usar la notación de Leibniz y manejarla como él lo hacía. Creo que esto es útil porque la notación de Leibniz tiene una gran fuerza heurística, y no debe presentar ningún problema, siempre que no acabes creyendo que una derivada, tal como la hemos definido, es un cociente de infinitésimos. Y siempre que dicha notación se use como un mero simbolismo y no se hagan demostraciones apoyadas en su supuesta significación.

4.2.3 Derivadas laterales

Definición. Se dice que f es **derivable por la izquierda** en a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda** de f en a.

Análogamente se dice que f es **derivable por la derecha** en a; si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la derecha** de f en a.

Referencias

Pérez, F. (2008). CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE. Universidad de Granada, Granada, España.